1 Классификация уравнений с частными производными второго порядка.

Определение. Пусть в пространстве E^2 задана некоторая функция $u(x,y)$, имеющая частные производные второго порядка (причем $u_{xy} = u_{yx}$). Тогда **общим уравнением в частных производных** называется уравнение:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{yy},u_{xx},u_{xy}) = 0,$$

где F – некоторая функция.

Определение. Квазилинейное уравнение - частный случай общего уравнения:

$$a_{11}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + a_{22}(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} + F_1(x,y,u,u_x,u_y) = 0.$$

Определение. Уравнение называется **линейным относительно старших производных**, если оно имеет вид:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0.$$

т.е. когда функции a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят только от переменных x, y.

Определение. Уравнение называется **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных (в данном случае u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}), так и относительно функции u и ее первых производных:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \tag{1.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f – функции только от x и y.

Определение. Если $f \equiv 0$, то уравнение (1.1) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Определение. Уравнение (1.1) имеет в точке (x_0, y_0)

1. **гиперболический тип**, если $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) > 0$;
2. **эллиптический тип**, если $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) < 0$;
3. **параболический тип**, если $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) = 0$.

Определение. Уравнение (1.1) имеет в области **гиперболический(эллиптический)[параболический]** тип, если $a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)a_{22}(x,y) > 0 (< 0)[= 0]$ во всех точках этой области.

Определение. Если уравнение имеет разный тип в различных точках области, то оно называется **уравнением смешанного типа** в этой области.

2 Вывод уравнения теплопроводности в пространстве.

Рассмотрим в трехмерном пространстве некоторое тело, проводящее тепло, и пусть температура в его произвольной точке M с координатами (x,y,z) в момент времени t задается функцией $u(x,y,z,t)$. Известно, что для вектора теплового потока $\overrightarrow{W}$ справедлива следующая формула, называемая **законом Фурье**:

$$\overrightarrow{W} = -k \operatorname{grad} u,$$

где $k(x,y,z)$ – коэффициент теплопроводности.

Если тело задается в пространстве $\mathbf{E^3}$ областью Ω с границей Σ, тогда количество тепла в Ω в момент времени t считается по формуле:

$$Q(t) = \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t)\,d\tau_M,$$

где c – удельная теплоемкость, а ρ – плотность вещества.

Уравнение распространения тепла в пространстве:

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)u_t(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial x}(k(x,y,z)u_x(x,y,z,t)) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x,y,z)u_y(x,y,z,t)) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(k(x,y,z)u_z(x,y,z,t)) + F(x,y,z,t).$$

Уравнение теплопроводности (в физической интерпретации - уравнение распространения тепла в однородном тонком стержне):

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ a^2 = \frac{k}{c\rho},\ f = \frac{F}{c\rho}. \tag{2.1}$$

3 Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Постановка основных задач.

Будем рассматривать следующее уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T.$$

Первая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) &= \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) &= \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Вторая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u_x(0,t) &= \nu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_x(l,t) &= \nu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Задача на полупрямой.

$$\begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) &= \mu(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача Коши.

$$\begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

4 Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

$$[\mathbf{4.1}] \begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) &= \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) &= \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Определение. Функция $u(x,t)$ называется **решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности** [4.1], если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $u \in C[\overline{Q}_T]$;

2. u_t, $u_{xx} \in C[Q_T]$;

3. $u(x,t)$ удовлетворяет условиям [4.1].

Найдем решение для первой краевой задачи с нулевыми краевыми условиями с однородным уравнением теплопроводности:

$$\textbf{[4.2]} \left\{ \begin{array}{lrcll} (1) & u_t & = & a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ (2) & u(0,t) & = & 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ (3) & u(l,t) & = & 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ (4) & u(x,0) & = & \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{array} \right.$$

Формула для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\int\limits_0^l \phi(s) \sin(\frac{\pi n}{l} s)\, ds \right) \sin(\frac{\pi n}{l} x) \exp\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}. \qquad (4.1)$$

Теорема 4.1 (существования). *Пусть функция $\phi(x)$ такова, что $\phi(x) \in C^1[0;\, l]$ и $\phi(0) = \phi(l) = 0$. Тогда формула (4.1) определяет класс решений задачи [4.2].*

5 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим множество $Q_T = \{(x,t) : (0;\, l) \times (0;\, T]\}$. Обозначим $\Gamma = \overline{Q}_T \setminus Q_T$.

Теорема 5.1 (принцип максимального значения). *Пусть $u(x,t) \in C[\overline{Q}_T]$, u_t, $u_{xx} \in C[Q_T]$* и *$u_t = a^2 u_{xx}$ в Q_T. Тогда*

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{\overline{Q}_T} u(x,t) & = & \max\limits_{\Gamma} u(x,t); \\ \min\limits_{\overline{Q}_T} u(x,t) & = & \min\limits_{\Gamma} u(x,t). \end{array}$$

В приложении к краевым задачам принцип максимума выглядит следующим образом. Пусть

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) & = & \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) & = & \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) & = & \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{array} \right.$$

Тогда $\max\limits_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \max\{\max\limits_{t \in [0;\, T]} \mu_1(t),\ \max\limits_{t \in [0;\, T]} \mu_2(t),\ \max\limits_{x \in [0;\, l]} \phi(x)\}$.

Это равенство имеет простой физический смысл. Оно означает, что температура стержня не может быть выше температуры на его краях и в начальный момент времени.

6 Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Теорема 6.1 (единственности). *Пусть функции $u_1(x,t), u_2(x,t)$ таковы, что $u_i \in C[\overline{Q}_T]$, $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \dfrac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T]$, $i = 1, 2$, причем они являются решениями* **одной и той же** *первой краевой задачи [4.1]. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ в $\overline{Q}_T$.*

Лемма 1. *Пусть функции $u_1, u_2(x,t)$ таковы, что*

$$u_i \in C[\overline{Q}_T],$$
$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T],\ i = 1, 2,$$

причем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} &= a^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \quad i = 1, 2; \\ u_1(0,t) &\geqslant u_2(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_1(l,t) &\geqslant u_2(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_1(x,0) &\geqslant u_2(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Тогда $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$ в $\overline{Q}_T$.

Теорема 6.2 (устойчивости)**.** *Пусть функции $u_1, u_2(x,t)$ таковы, что*

$$u_i \in C[\overline{Q}_T],$$
$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T],\ i = 1, 2,$$

причем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} &= a^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 < t \leqslant T \quad i = 1, 2; \\ u_i(0,t) &= \mu_1^i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2; \\ u_i(l,t) &= \mu_2^i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2; \\ u_i(x,0) &= \phi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Тогда $\max\limits_{\overline{Q}_T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \max\{\max\limits_{t \in [0;\,T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max\limits_{t \in [0;\,T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max\limits_{x \in [0;\,l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|\}$

Это утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

7 Единственность решения общей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

Общая краевая задача формулируется так:

$$[\mathbf{7.1}] \begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t); \quad 0 < t \leqslant T,\ 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0,t) - \alpha_2 u_x(0,t) &= p(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ \beta_1 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) &= q(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x); \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – неотрицательные постоянные, причем требуется, чтобы

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 0; \quad \beta_1 + \beta_2 > 0.$$

Теорема 7.1 (единственности)**.** *Пусть в Q_T функции $u_1, u_2(x,t)$ таковы, что*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} \in C[\overline{Q}_T],\ i = 1, 2;$$
$$deriv^2 u_i x^2, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T],\ i = 1, 2,$$

причем они являются решениями одной и той же задачи [7.1]. Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{Q}_T$.

8 Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Теорема 8.1 (единственности)**.** *Пусть две функции u_1, $u_2(x,t)$ непрерывны на $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, являются решениями одной и той же задачи Коши [9.1], причем*

$$\left.\begin{aligned} &|u_i(x,t)| \leqslant M,\ \forall (x,\,t)\in\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}^+};\\ &\frac{\partial u_i}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+).\end{aligned}\right. \qquad i=1,2.$$

Тогда $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ $\forall (x,\,t)\in(\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}^+})$

9 Существование решения задачи Коши.

Рассмотрим однородную задачу Коши:

$$[\mathbf{9.1}]\left\{\begin{array}{lrcll} (1) & u_t & = & a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ t>0;\\ (2) & u(x,0) & = & \phi(x), & -\infty<x<+\infty.\end{array}\right.$$

Формула для $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)\,ds. \tag{9.1}$$

Обозначив $G(x,s,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\dfrac{(x-s)^2}{4a^2t}\}$, получим

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,s,t)\phi(s)\,ds.$$

Покажем, что функция $G(x,s,t)$ является решением уравнения теплопроводности при фиксированном s:

$$\begin{aligned} G_x(x,s,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\left(-\frac{2(x-s)}{4a^2t}\right);\\ G_{xx}(x,s,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\frac{(x-s)^2}{4a^4t^2}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\left(-\frac{2}{4a^2t}\right);\\ G_t(x,s,t) &= -\frac{1}{2\sqrt{4\pi a^2}t^{\frac{3}{2}}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}\end{aligned}$$

Легко проверить, что $G_t(x,s,t)=a^2G_{xx}(x,s,t)$.

Теперь докажем, что при определенных ограничениях на начальное условие полученная функция будет существовать.

Теорема 9.1 (существования)**.** *Пусть функция $\phi(x)$ задает начальное условие в задаче Коши [9.1], причем $\phi(x)\in C(\mathbb{R})$, $|\phi(x)|\leqslant M$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Тогда функция $u(x,t)$, определяемая формулой (9.1), непрерывна при $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, имеет непрерывные частные производные u_t, u_{xx} при $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ и $\forall x_0\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{\substack{t\to0+\\x\to x_0}}u(x,t)=\phi(x_0)$.*

Замечание. Последнее утверждение теоремы означает, что функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} \phi(s)\,ds, & t > 0; \\ \phi(x), & t = 0. \end{cases}$$

непрерывна в $(x,t):\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0$.

Следствие 1. Заметим, что при выполнении условий теоремы ($\phi(x) \in C(\mathbb{R})|,\ |\phi(x)| \leqslant M$) мы получаем ограниченность $u(x,t)$:

$$|u(x,t)| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(x,s,t)||\phi(s)|\,ds \leqslant M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)\,ds = M.$$

Следствие 2. Также можно получить бесконечную дифференцируемость $u(x,t)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. В этом случае

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial t^m}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p G}{\partial x^k \partial t^m}(x,s,t)\phi(s)\,ds, \quad (k+m=p)$$

а этот интеграл равномерно сходится, что можно показать теми же утверждениями, что и в доказательстве теоремы.

Следствие 3. Приняв условие задачи Коши, мы получаем "бесконечную" скорость распространения тепла. Представим, что непрерывная функция $\phi(x) = u(x,0)$ равна нулю всюду, за исключением некоторого отрезка $[a;\,b]$. Тогда получаем, что

$$u(x,t) = \int\limits_{a}^{b} G(x,s,t)\phi(s)\,ds > 0 \quad \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

10 Метод продолжения для решения первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Рассмотрим **первую краевую задачу на полупрямой**:

$$[\mathbf{10.1}] \begin{cases} u_t &=& a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0; \\ u(0,t) &=& 0, & t \geqslant 0; \\ u(x,0) &=& \phi(x), & x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\phi(0) = 0$.

Найдем ее решение, доопределив нечетным образом функцию $\phi(x)$, задающую начальное условие на всей вещественной оси:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geqslant 0; \\ -\phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} - \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\} \right] \phi(s)\,ds \tag{10.1}$$

– решение первой краевой задачи на полупрямой.

Вторая краевая задача на полупрямой имеет следующий вид:

$$[\mathbf{10.2}] \begin{cases} u_t &=& a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0; \\ u_x(0,t) &=& 0, & t \geqslant 0; \\ u(x,0) &=& \phi(x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Снова для поиска решения доопределим функцию, задающую начальное условие, но на этот раз четным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geqslant 0; \\ \phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(-s)\,ds =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\} + \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\right]\phi(s)\,ds.$$

– **решение второй краевой задачи на полупрямой**.

11 Функция Грина для первой краевой задачи.

Рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) &= 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) &= 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Как уже известно, ее решение задается следующим образом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\int\limits_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)\,ds\right)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}.$$

Мы можем представить его в несколько ином виде, как уже делали при решении задачи Коши:

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\phi(s)\,ds,$$

$$\text{где } G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\sin(\frac{\pi n}{l}s)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}. \tag{11.1}$$

– **функция Грина для первой краевой задачи**.

Свойство 1.

$$G(x,s,t) = G(s,x,t).$$

Свойство 2.

$$G(x,s,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+).$$

Свойство 3.

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}; \\ G_t = a^2 G_{ss}. \end{cases}$$

Свойство 4.

$$G(x,s,t) \geqslant 0,\ x,s \in [0;\, l],\ t > 0.$$

12 Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Пусть Ω – некоторая открытая область в $\mathbf{E^3}$, ограниченная поверхностью Σ. Аналогично, D – некоторая открытая область в $\mathbf{E^2}$, ограниченная кривой L. Рассмотрим такие уравнения теплопроводности:

$$\begin{array}{rcll} u_t(x,y,z,t) & = & a^2\Delta u(x,y,z,t) + f_1(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega; \quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}; \\ u_t(x,y,t) & = & a^2\Delta u(x,y,t) + f_2(x,y), & (x,y)\in D; \quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}. \end{array}$$

В случае стационарного теплового процесса ($u_t \equiv 0$) мы получаем уравнения эллиптического типа: $\Delta u = -f$. При этом из общего вида получаются два типа уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z); \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y). \end{array}\right. \quad \text{– уравнения Пуассона в } \mathbf{E^3} \text{ и } \mathbf{E^2};$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{array}\right. \quad \text{– уравнения Лапласа в } \mathbf{E^3} \text{ и } \mathbf{E^2};$$

Определение. Функция $u(x,y,z)$ называется **гармонической** в Ω, если $u\in C^2(\Omega)$ и $\Delta u \equiv 0$ в Ω.
В дальнейшем мы будем рассматривать в пространстве $\mathbf{E^3}$ такие задачи:

Внутренняя задача Дирихле

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

Внутренняя задача Неймана

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) & = & \nu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

Внешняя задача Дирихле

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

Внешняя задача Неймана

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) & = & \nu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

Двумерные аналоги, например:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y) & = & 0, & (x,y)\in D; \\ u(x,y) & = & \mu(x,y), & (x,y)\in L. \end{array}\right. \quad \textbf{– внутренняя задача Дирихле в } E^2.$$

Функция

$$u(x,y,z) = \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

(R_{MM_0} – расстояние между точками $M(x,y,z)$ и $M_0(x_0,y_0,z_0)$) является решением уравнения Лапласа в $E^3 \setminus M_0$:

В случае $\mathbf{E^2}$ функция $u(x,y) = \ln \dfrac{1}{\rho_{MM_0}}$, где $\rho_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, будет решением уравнения Лапласа в $\mathbf{E^2} \setminus M_0$.

Эти функции называются **фундаментальными решениями** уравнения Лапласа.

13 1-я и 2-я формулы Грина.

Пусть поверхность Σ состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные координатным осям, пересекают ее либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков. Тогда в области Ω для функции $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, где $P, Q, R \in C^1(\overline{\Omega})$, верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\vec{A},\, \vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\, \vec{A}\, d\tau. \tag{13.1}$$

Пусть $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ \vec{A} = u \operatorname{grad} v$. Тогда

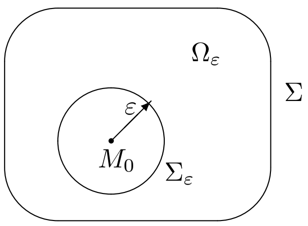
$$\iiint\limits_{\Omega} ((\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v) + u\Delta v)\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma. \tag{13.2}$$

Полученная формула называется **первой формулой Грина**.

Поменяем местами в первой формуле Грина функции u и v . Вычитая полученное равенство из (13.2), получим **вторую формулу Грина**:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right)\, d\sigma. \tag{13.3}$$

3-я формула Грина.



$$4\pi u(M_0) = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u(M)\, d\tau_M - \iint\limits_{\Sigma} \left[u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) \right] d\sigma_M \tag{14.1}$$

Эта формула называется **третьей формулой Грина**.

Проведя аналогичные рассуждения в E^2, легко получить двумерные аналоги второй и третьей формул Грина:

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\, ds = \int\limits_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right)\, dl.$$

$$2\pi u(M_0) = -\iint\limits_D \ln\left(\frac{1}{\rho_{MM_0}}\right)\Delta u\, ds - \int\limits_L \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\right) - \ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\, dl.$$

14 Свойства гармонических функций.

Определение. Функция u называется гармонической в области Ω, если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω.

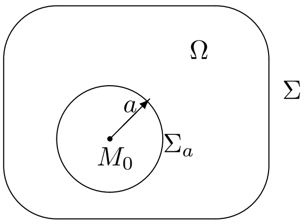
Свойство 1. Если v – гармоническая в Ω, то

$$\iint\limits_{\widetilde{\Sigma}} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

где $\widetilde{\Sigma}$ – произвольная замкнутая поверхность, лежащая в Ω.

Свойство 2 (Теорема о среднем значении). Пусть функция u – гармоническая в Ω. Тогда для любой точки $M_0 \in \Omega$ и для любой сферы Σ_a радиуса a с центром в M_0, лежащей в Ω справедлива формула:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a} u(P)\, d\sigma_p. \tag{15.1}$$



Свойство 3. Если функция u – гармоническая в Ω, то она бесконечно дифференцируема в Ω.

15 Принцип максимума для гармонических функций.

Теорема 16.1 (Принцип максимума)**.** *Если функция $u \in C(\overline{\Omega})$ и гармоническая в Ω, то она достигает своего максимума (минимума) на границе области:*

$$\max_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \max_{M\in\Sigma} u(M);$$
$$\min_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \min_{M\in\Sigma} u(M).$$

16 Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле.

Здесь и далее функции μ и ν – некоторые заданные функции.

Определение. Функция $u(x,y,z)$ называется **решением внутренней задачи Дирихле**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$[\mathbf{17.1}]\left\{\begin{array}{lrcll}(1) & u(x,y,z) & \in & C(\overline{\Omega}),\ u\in C^2(\Omega); & \\ (2) & \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ (3) & u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma.\end{array}\right.$$

Теорема 17.1 (единственности). *Пусть функции $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ являются решениями* **одной и той же** *внутренней задачи Дирихле [17.1]. Тогда $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$ в $\overline{\Omega}$.*

Лемма 2. *Пусть функции $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ такие, что:*

1. $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$;
2. $u_1, u_2 -$ *гармонические в* Ω;
3. $u_1(x,y,z)\geqslant u_2(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Sigma$.

Тогда $u_1\geqslant u_2$ в Ω.

Теорема 17.2 (устойчивости). *Пусть функции $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ таковы, что:*

$$\left\{\begin{array}{lrcll}(1) & u_1,u_2 & \in & C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega); & \\ (2) & \Delta u_1(x,y,z) & = & \Delta u_2(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ (3) & u_i(x,y,z) & = & \mu_i(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma,\ i=1,2.\end{array}\right.$$

Тогда $\max\limits_{\overline{\Omega}}|u_1-u_2|\leqslant\max\limits_{\Sigma}|\mu_1-\mu_2|$.

Следствие. Пусть каждая функция из последовательности $u_n(x,y,z)$, а также функция $u(x,y,z)$, является решением соответствующей задачи Дирихле при $u_n=\mu_n$ на $\Sigma,\ u=\mu$ на Σ. Тогда из равномерной сходимости $\mu_n(\mu_n\rightrightarrows\mu$ на $\Sigma)$ следует, что $u_n\rightrightarrows u$ в Ω.

Замечание

в этом, достаточно провести аналогичные рассуждения.

18 Единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двух- и трехмерном случаях.

Определение. Функция $u(x,y,z)$ называется **решением внешней задачи Дирихле в пространстве**, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$[\mathbf{18.1}]\left\{\begin{array}{llcll}(1) & u(x,y,z) & \in & C(E^3\setminus\Omega); & \\ (2) & u(x,y,z) & - & \text{гармоническая в} & E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ (3) & u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \\ (4) & u(x,y,z) & \rightrightarrows & 0 & \text{(равномерно сходится к нулю) при } (x,y,z)\longrightarrow\infty.\end{array}\right.$$

Теорема 18.1 (единственности). *Пусть $u_1, u_2(x,y,z)$ – такие функции, что*

$$\left\{\begin{array}{lrcll}(1) & u_1,u_2(x,y,z) & \in & C(E^3\setminus\Omega); & \\ (2) & u_1,u_2 & - & \textit{гармонические в} & E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ (3) & u_1,\ u_2(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \\ (4) & u_1,\ u_2(x,y,z) & \rightrightarrows & 0, & (x,y,z)\longrightarrow\infty.\end{array}\right.$$

Тогда $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$ в $E^3\setminus\overline{\Omega}$.

Определение. Функция $u(x,y)$ называется **решением внешней задачи Дирихле на плоскости**, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$[\mathbf{18.2}]\begin{cases} (1) & u(x,y) & \in & C(E^2\setminus D), & u\in C^2(E^2\setminus\overline{D}); \\ (2) & \Delta u(x,y) & = & 0, & (x,y)\in E^2\setminus\overline{D}; \\ (3) & u(x,y) & = & \mu(x,y), & (x,y)\in L. \\ (4) & |u(x,y)| & \leqslant & C=const, & (x,y)\in E^2\setminus\overline{D}. \end{cases}$$

Теорема 18.2 (единственности). *Пусть $u_1,u_2(x,y)$ – такие функции, что*

$$\begin{cases} (1) & u_1,u_2(x,y) & \in & C(E^2\setminus D), & u\in C^2(E^2\setminus\overline{D}); \\ (2) & \Delta u_1(x,y) & = & \Delta u_2(x,y)=0, & (x,y)\in E^2\setminus\overline{D}; \\ (3) & u_1,u_2(x,y) & = & \mu(x,y), & (x,y)\in L. \\ (4) & |u_i(x,y)| & \leqslant & c_i=const, & i=1,2,\ (x,y)\in E^2\setminus\overline{D}. \end{cases}$$

Тогда $u_1(x,y)=u_2(x,y)$ в $E^2\setminus\overline{D}$.

17 Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа и необходимое условие ее разрешимости.

Определение. Функция $u(x,y,z)$ из $\mathbf{E^3}$ называется **решением внутренней задачи Неймана**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$[\mathbf{19.1}]\begin{cases} (1) & u(x,y,z) & \in & C^1(\overline{\Omega}), & u\in C^2(\Omega); \\ (2) & \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ (3) & \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) & = & \nu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{cases}$$

Предположим, что u – решение [19.1], а v – произвольная дважды дифференцирумая функция. Запишем для этих функций вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\,d\sigma$$

Тогда при $v\equiv 1$ получим

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma}\nu(x,y,z)\,d\sigma = 0. \tag{19.1}$$

Равенство (19.1) называется **необходимым условием разрешимости** внутренней задачи Неймана.

Теорема 19.1 (единственности). *Пусть $u_i(x,y,z)$, $i=\ 1,2$:*
1) $u_i\in C^1(\overline{\Omega})$;
2) $u_i -$ *гармоническая в* Ω;
3)$\dfrac{\partial u_i}{\partial n}(x,y,z)=\nu(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Sigma.$
Тогда $u_1-u_2\equiv const$. (Фактически это означает, что при $\nu\equiv 0$

19 Свойства функции Грина для задачи Дирихле.

Третья формула Грина в $\mathbf{E^3}$ для гармонической функции u:

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P,\ P\in\Sigma,\ M\in\Omega. \tag{20.1}$$

Вторая формула Грина (v – некая гармоническая в Ω функция):

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\sigma.$$

$$u(M) = \iint\limits_{\Sigma} \left[G(M,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)\right]\, d\sigma_P.$$

Если $G|_{P\in\Sigma} = 0$, то $u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)\, d\sigma_P$ – мы получили формулу для решения задачи Дирихле [17.1]:

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} \mu(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)\, d\sigma_P.$$

Определение. Функция $G(M,P) : M(x,y,z), P(\xi,\eta,\zeta) \in \overline{\Omega}$ называется **функцией Грина для внутренней задачи Дирихле**, если:

1. $\dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \forall P \in \Omega,\ P \neq M$

2. Для $G(M,P)$ справедливо представление

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v, \text{ где } v \text{ – гармоническая функция в } \Omega. \tag{20.2}$$

3. $G(M,P)|_{P\in\Sigma} = 0$.

$$\text{То есть } \begin{cases} v \text{ – гармоническая в } \Omega \\ v|_\Sigma = -\dfrac{1}{4\pi R_{MP}} \end{cases} \text{ – это все требования, наложенные нами на } v.$$

Свойство 1.

$$G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega,\ P \neq M.$$

Свойство 2.

$$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M,P \in \Omega,\ M \neq P. \tag{20.3}$$

20 Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью.

Решения уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве:

$$\mathbf{E^3} : \frac{1}{R_{MP}}; \quad \mathbf{E^2} : \ln\frac{1}{\rho_{MP}},$$

где $M(x,y,z)$ – фиксированная точка, $P(\xi,\eta,\zeta)$ – переменная. Пусть Σ – некоторая замкнутая поверхность, ограничивающая область Ω, содержащую точку M.

Определение. Рассмотрим в $\mathbf{E^3}$ следующую функцию

$$v(M) = \iint\limits_{\Sigma} g(P)\frac{1}{R_{MP}}\, d\sigma_P.$$

и назовем ее **потенциалом простого слоя**.

Определение. Рассмотрим функцию

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$$

и назовем ее **потенциалом двойного слоя**.

Определение. Пусть L – некоторая замкнутая кривая, окружающая точку $M(x, y)$:

$v(M) = \int\limits_L g(P) \ln \dfrac{1}{\rho_{MP}} \, dl_P$ – **потенциал простого слоя на плоскости.**

$u(M) = -\int\limits_L f(P) \dfrac{\partial}{\partial n} \left(\ln \dfrac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P$ – **потенциал двойного слоя на плоскости.** gf.

Рассмотрим более детально потенциал двойного слоя на плоскости:

$$u(M) = -\int\limits_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P. \tag{21.1}$$

Пусть $u_e(M) = \int\limits_L \dfrac{\cos\angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} \, dl_P$ – **потенциал с единичной плотностью**.

$$u_e(M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in D; \\ \pi, & M \in L; \\ 0, & M \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{21.2}$$

Определение. Интеграл $\int\limits_L F(P, M) \, dl_P$ называется **равномерно сходящимся** в точке $M_0 \in L$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V(M_0)$ – окрестность точки M_0 и дуга $l \in L$ такая, что интеграл $\int\limits_l F(P, A) \, dl_P$ сходится $\forall A \in V(M_0)$ и $|\int\limits_l F(P, A) \, dl_p| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 21.1. *Пусть функция $F(P, M)$ непрерывна всюду при $P \neq M$. Тогда интеграл $\int\limits_l F(P, M) \, dl_p$ является непрерывной функцией в тех точках, где он равномерно сходится.*

Возьмем на границе L некоторую точку M_0 и рассмотрим функцию $u(M) - f(M_0) u_e(M)$.

Теорема 21.2. *Если в (21.1) функция $f(P)$ непрерывна в точке M_0, то функция $u(M) - f(M_0)u_e(M)$ – непрерывна в точке M_0.*

Следствие 1.

Обозначим
$$u_{\text{внутр}}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0; \\ M \in D}} u(M);$$
$$u_{\text{внеш}}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0; \\ M \notin \overline{D}}} u(M).$$

Тогда
$$u_{\text{внутр}}(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0);$$
$$u_{\text{внеш}}(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0).$$

Таким образом, на контуре можно представить потенциал так:

$$u(M_0) = \frac{u_{\text{внеш}}(M_0) + u_{\text{внутр}}(M_0)}{2}.$$

Следствие 2. Функция $u(M)$ непрерывна при $M \in L$, если $f(P)$ непрерывна на L.

21 Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле в $\mathbf{E^2}$:

$$[\mathbf{22.1}] \begin{cases} (1) & u(x,y) & \in & C(\overline{D}); \\ (2) & u(x,y) & - & \text{гармоническая в} \quad \overline{D}; \\ \\ (3) & u(x,y) & = & \mu(x,y), \qquad\qquad (x,y) \in L. \end{cases}$$

$$\pi f(M) + \int\limits_L f(P) \frac{\cos\angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}}\, dl_p = \mu(M),\ M \in L \tag{22.1}$$

Это уравнение относительно функции $f(P)$ называется **интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода**.

22 Существование решения внутренней задачи Дирихле.

Теорема 23.1 (альтернатива Фредгольма)**.** *Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное непрерывное решение $\forall \mu(M) \in C(L)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение (22.1) (т.е. $\mu(M) \equiv 0$) имеет только нулевое решение.*

Определение. Контур L называется строго выпуклым, если, какие бы две точки на нем мы не взяли, отрезок, их соединяющий, лежит целиком внутри контура.

Теорема 23.2 (существования и единственности)**.** *Пусть область D строго выпукла (L – строго выпуклый контур). Тогда внутренняя задача Дирихле [22.1] имеет единственное решение для любой непрерывной на L функции $\mu(M)$.*

23 Уравнение колебаний. Постановка основных задач.

Пусть функция $u(x,t) \in C^2((x,t) : 0 < x < l,\ t > 0)$. Тогда уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0. \tag{24.1}$$

называется **уравнением колебаний идеальной струны.**

В случае функции от двух пространственных переменных $u(x,y,t)$:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ (x,y) \in D,\ t > 0$$

– это **уравнение колебаний упругой мембраны**.

Рассмотрим уравнение (24.1). Мы можем задать **начальные условия:**

$$\begin{cases} u(x,0) & = & \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l; \text{ – интерпретируется как смещение струны от положения равновесия;} \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

и **краевые условия**:

$$\begin{cases} u(l,t) &= \mu(t), \quad t > 0; \quad (\text{ в закрепленном случае } \mu \equiv 0) \\ u_x(l,t) &= \nu(t), \quad t > 0; \\ u(l,t) + \alpha u_x(l,t) &= \theta(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

– обычно мы берем некоторые из них.

Краевые задачи ставятся аналогично случаю уравнений параболического типа. Вот пример **первой краевой задачи**.

$$\begin{cases} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \\ u(0,t) &= \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) &= \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Она же для **полупрямой**:

$$\begin{cases} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad x > 0, 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x \geqslant 0; \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad x \geqslant 0; \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Задача Коши

$$\begin{cases} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty; \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

24 Формула Даламбера. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения колебаний:

$$[\mathbf{25}.1] \begin{cases} (1) \quad u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ 0 < t \leqslant T; \\ (2) \quad u(x,0) &= \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty; \\ (3) \quad u_t(x,0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Пусть $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ и является решением задачи Коши [25.1].

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at) + \phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{25.1}$$

Это выражение называется **формулой Даламбера**.

Теорема 25.1 (существования и единственности решения задачи Коши)**.** *Пусть функция $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда существует и единственна функция $u(x,t)$ такая, что $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}^+)$ и является решением задачи Коши [25.1], где функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ определяют начальные условия.*

Теорема 25.2 (устойчивости)**.** *Пусть $\phi_1, \phi_2(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi_1, \psi_2(x) \in C^1(\mathbb{R})$ и ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда, если $u_1, u_2(x,t)$ – решения задач типа [25.1] с ϕ_1, ψ_1 и ϕ_2, ψ_2 в качестве начальных условий соответственно, то*

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

25 Метод продолжения для решения первой и второй краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой.

Первая краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой с однородным краевым условием имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (1) & u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0; \\ (2) & u(0,t) = 0, & t > 0; \\ (3) & u(x,0) = \phi(x), & x \geqslant 0; \\ (4) & u_t(x,0) = \psi(x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Добавим условия сопряжения

$$\begin{cases} \phi(0) = 0; \\ \psi(0) = 0. \end{cases}$$

для обеспечения непрерывности функций $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ в нуле.

Найдем решение данной краевой задачи, расширив ее до случая всей прямой. Доопределим нечетным образом функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ на всей прямой, задав новые функции Φ и Ψ:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geqslant 0; \\ -\phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0; \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда общая формула будет такой:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi, & x \geqslant at; \\ \dfrac{\phi(at+x) - \phi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)\, d\xi, & x < at. \end{cases}$$

Вторая краевая задача на полупрямой с однородным краевым условием имеет вид:

$$\begin{cases} (1) & u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ (2) & u_x(0,t) = 0, & t \geqslant 0; \\ (3) & u(x,0) = \phi(x), & x \geqslant 0; \\ (4) & u_t(x,0) = \psi(x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Четное продолжение:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x),\ x \geqslant 0; \\ \phi(-x),\ x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x),\ x \geqslant 0; \\ \psi(-x),\ x < 0. \end{cases}$$

Общая формула:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi, & x \geqslant at; \\ \dfrac{\phi(at+x) - \phi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)\, d\xi, & x < at. \end{cases}$$

26 Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \cos(\frac{\pi n}{l} at) \phi(s) \sin(\frac{\pi n}{l} s)\, ds + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \sin(\frac{\pi n}{l} at) \psi(s) \sin(\frac{\pi n}{l} s)\, ds \right] sin(\frac{\pi n}{l} x). \qquad (27.1)$$

Теорема 27.1 (существования). *Пусть*

$$\begin{array}{l} \phi(x) \in C^3[0;\, l],\ \phi(0) = \phi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0; \\ \psi(x) \in C^2[0;\, l],\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{array}$$

Тогда функция $u(x,t)$ *, определяемая формулой (27.1), обладает следующими свойствами:* $u(x,t) \in C^2 \{[0;\, l] \times [0;\, T]\}$ *(*T *– произвольное* > 0*), и удовлетворяет условиям (1)-(4) (является решением краевой задачи* **??***).*

27 Интеграл энергии. Единственность решения краевых задач для уравнения колебаний.

Рассмотрим общую первую краевую задачу:

$$[\mathbf{28.1}] \left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt} & = & a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ 0 < t < T; \\ u(0,t) & = & \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) & = & \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) & = & \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l; \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{array} \right.$$

Теорема 28.1 (единственности). *Пусть функции* $u_1, u_2(x,t) \in C^2 \{[0;\, l] \times [0;\, T]\}$ *и являются решениями одной и той же краевой задачи [28.1]. Тогда* $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ *на* $\{[0;\, l] \times [0;\, T]\}$.

Определим функцию

$$E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2 (v_x(x,t))^2 \right] dx$$

и назовем ее **интегралом энергии**. В физической интерпретации с точностью до константы это полная энергия, к примеру, нашей колеблющейся струны.

Замечание. Все утверждения верны и для задач с краевыми условиями второго рода:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(0,t) = 0; \\ v_x(l,t) = 0. \end{array} \right.$$

– это ничего не меняет в доказательстве, кроме способа доказательства равенства нулю внеинтегрального слагаемого, а также верны для краевых условий смешанного вида.

28 Задача с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу:

$$[\mathbf{29.1}] \left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & u_{xy}(x,y) & = & a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + f(x,y,u(x,y)),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2; \\ (2) & u(x,0) & = & \phi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l_1; \\ (3) & u(0,y) & = & \psi(y),\ 0 \leqslant y \leqslant l_2. \end{array} \right.$$

Эта задача с нелинейным уравнением гиперболического типа называется **задачей Гурса**.

Классическое уравнение в частных производных второго порядка имеет следующий вид:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{29.1}$$

Поставим ему в однозначное соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{29.2}$$

Тогда функции (кривые), являющиеся решением (29.2), называются **характеристиками уравнения** (29.1).

Определение. Функция $u(x,y)$ называется **решением задачи** [29.1], если $u(x,y) \in C^2\{[0;\, l_1]\times[0;\, l_2]\}$ и удовлетворяет условиям (1)-(3).

Пусть функция $u(x,y)$ – решение задачи [29.1]. Тогда, интегрируя уравнение (1) сначала по y, а потом по x, получим

$$u_x(x,y) = u_x(x,0) + \int_0^y a(x,\eta)u_x(x,\eta)\,d\eta + \int_0^y b(x,\eta)u_y(x,\eta)\,d\eta + \int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))\,d\eta;$$

$$u(x,y) = u(0,y)+u(x,0)-u(0,0)+\int_0^x\int_0^y a(\xi,\eta)u_x(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi+\int_0^x\int_0^y b(\xi,\eta)u_y(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\eta\,d\xi. \tag{29.3}$$

Введем две новые функции

$$\begin{cases} v(x,y) = u_x(x,y); \\ w(x,y) = u_y(x,y). \end{cases}$$

Тогда, используя начальные условия (2)-(3), уравнение (29.3) можно переписать в виде

$$u(x,y) = \psi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int_0^x\int_0^y \left[a(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)w(\xi,\eta)\right]\,d\eta\,d\xi + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\eta\,d\xi. \tag{29.4}$$

Продифференцировав по x, получим

$$v(x,y) = \phi'(x) + \int_0^y \left[a(x,\eta)v(x,\eta) + b(x,\eta)w(x,\eta)\right]\,d\eta + \int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))\,d\eta. \tag{29.5}$$

Аналогично, по y:

$$w(x,y) = \psi'(y) + \int_0^x \left[a(\xi,y)v(\xi,y) + b(\xi,y)w(\xi,y)\right]\,d\xi + \int_0^x f(\xi,y,u(\xi,y))\,d\xi. \tag{29.6}$$

Итак, если $u(x,t)$ – решение задачи [29.1], то существуют функции $v(x,t)$, $w(x,t)$, удовлетворяющие уравнениям (29.4)-(29.6). Обратно, из существования непрерывных функций u, v, w, являющихся решениями уравнений (29.4) - (29.6), следует, что $v = u_x$; $w = u_y$. Также непосредственным дифференцированием можно убедиться, что функция $u(x,t)$ будет являться решением задачи [29.1].

29 Существование решения задачи с данными на характеристиках.

Теорема 30.1 (существования). *Пусть выполняются следующие четыре условия:*

1. $a(x,y),\, b(x,y) \in C\{[0;\, l_1] \times [0;\, l_2]\}$

2. $f(x,y,p) \in C\{[0;\, l_1] \times [0;\, l_2] \times \mathbf{E}\}$ *– то есть мы заменили функцию $u(x,y)$ переменной p, принимающей любые значения.*

3. $|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \leqslant L|p_1 - p_2|,\ \forall x \in [0;\, l_1],\ \forall y \in [0;\, l_2],\ \forall p_1, p_2 \in E$ *– условие Липшица по p.*

4. $\phi(x) \in C^1[0;\, l_1],\ \psi(y) \in C^1[0;\, l_2],\ \phi(0) = \psi(0).$

Тогда существует решение задачи [29.1].

30 Единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Теорема 31.1 (единственности решения задачи [29.1])**.** *Пусть существуют две системы функций $\{u_1(x,y),\, v_1(x,y),\, w_1(x,y)\}$ и $\{u_2(x,y),\, v_2(x,y),\, w_2(x,y)\}$, являющиеся решениями системы интегральных уравнений (29.4)-(29.6), причем выполнены условия (1)-(4) теоремы* **30.1** *(существования решения задачи [29.1]). Тогда функции*

$$U(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y),\ V(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y),\ W(x,y) = w_1(x,y) - w_2(x,y)$$

тождественно равны нулю в $\Pi_{l_1 l_2} = \{[0;\, l_1] \times [0;\, l_2]\}$. (То есть системы функций совпадают.)

31 Сопряженный дифференциальный оператор. Примеры.

Будем действовать в пространстве $\mathbf{E^n}$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – набор переменных, а $u(x)$ – функция от n переменных.

Определение. Дифференциальный оператор $L[u]$ от некоторой функции $u(x) \in C^2(\mathbf{E^n})$ определяется как

$$L[u] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u, \tag{32.1}$$

где $a_{ij},\, b_i \in C^2(\mathbf{E^n})$, c – некоторые функции. Так как частные производные второго порядка в данном случае не зависят от порядка дифференцирования, то принимается соглашение: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Определение. Каждому дифференциальному оператору $L[u]$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие так называемый **сопряженный оператор** к L:

$$M[v] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(x)v)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b_i(x)v)_{x_i} + c(x)v.$$

Определение. Дифференциальный оператор $L[u]$ называется **самосопряженным**, если $L[u] = M[u]$.

Нам понадобится следующая формула:

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^{n} (p_i(x))_{x_i}, \tag{32.2}$$

где $p_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left[v a_{ij} u_{x_j} - u(a_{ij}v)_{x_j} \right] + b_i uv.$

Пример 1. Пусть $\Omega \subset \mathbf{E^3}$, и скалярное произведение определяется так:

$$(f,g) = \iiint\limits_{\Omega} f g \, d\tau, \quad f,g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Тогда для функций $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и таких, что $u, v|_\Sigma = 0$, где Σ – граница Ω, верно, что

$$(v, L[u]) = (M[v], u).$$

Пример 2. Простейшим примером самосопряженного оператора является оператор Лапласа, к примеру, в $\mathbf{E^3}$:

$$L[u] = \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}.$$

Легко проверить, что $M[v] = \Delta v$.

32 Метод Римана.

Рассмотрим в $\mathbf{E^2}$ для функции $u(x, y)$ такой дифференциальный оператор:

$$L[u] = u_{xy} + a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y). \tag{33.1}$$

По определению, сопряженный к нему имеет следующий вид:

$$M[v] = v_{xy} - (a(x, y)v)_x - (b(x, y)v)_y + c(x, y)v.$$

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = &-\int\limits_B^C \left\{ \left[\frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right] dy - \left[\frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right] dx \right\} + \\ &+ \frac{1}{2}(uv)\Big|_C + \frac{1}{2}(uv)\Big|_B + \iint\limits_D v(x, y)F(x, y)ds. \end{aligned} \tag{33.2}$$

Получаем систему для поиска $u(x, y)$ на контуре L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x, f(x)) &= \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} f'(x); \\ \psi(x, f(x)) &= \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \end{cases}$$

Ее определитель нигде не равен нулю. Отсюда следует, что $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ существуют и их можно определить однозначно.